

תוכן העניינים:

2	מבוא להנדסת חשמל
2	אותות חשמליים
2	טריגונומטריה בסיסית :
2	סיכום כללי :
7	שאלות :
10	תשובות סופיות :
11	אותות במעגל החשמלי :
11	הגדרות :
12	אותות מחזוריים :
13	נוסחאות עבור אותות מרכזיים :
15	שאלות :
17	תשובות סופיות :

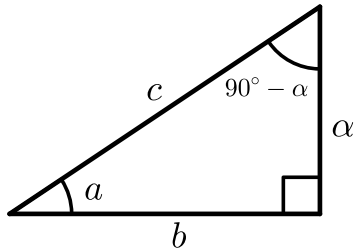
מבוא להנדסת חשמל

אותות חשמליים

טריגונומטריה בסיסית:

סיכום כללי:

הגדרות טריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{הניצב שמול הזווית}}$$

זהויות יסודיות:

1. זוויות משלימות ל- 90° מקיימות:

i. $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ ו- $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$

ii. $\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$ ו- $\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$

2. משפט פיתגורס במשולש מניב: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

3. הגדרת \tan באופן הבא: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

4. הגדרת \cot באופן הבא: $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

5. קשר בין \tan ו- \cot עבור אותה הזווית: $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

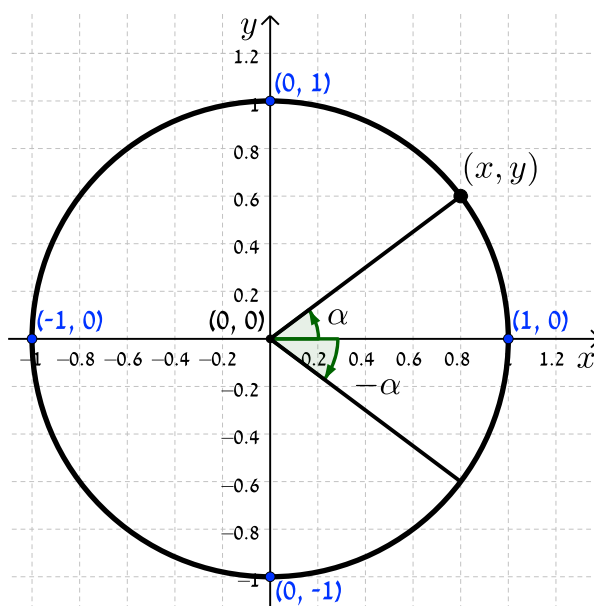
ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

פונקציה	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ϕ
cot	ϕ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

המעגל הטריגונומטרי:

הגדרות:

1. מעגל קנוני שרדיוסו יחידה אחת.
2. זווית חיובית תוגדר בתור הזווית המרכזית שנוצרת בין הכיוון החיובי של ציר ה- x ורדיוס לנקודה (x, y) שעל היקף המעגל, נגד כיוון השעון. זווית שלילית תוגדר באותו האופן תוך הליכה עם כיוון השעון.



קשרים ברביע הראשון:

הקשר בין שיעורי נקודה (x, y) שעל היקף המעגל לבין הפונקציות \sin ו- \cos הוא: $\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$.

זהויות לכל רביע:

רביע רביעי	רביע שלישי	רביע שני
$\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$	$\sin \alpha = -\sin(180^\circ + \alpha)$	$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$
$\cos \alpha = \cos(-\alpha)$	$\cos \alpha = -\cos(180^\circ + \alpha)$	$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$
$\tan \alpha = -\tan(-\alpha)$	$\tan \alpha = \tan(180^\circ + \alpha)$	$\tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$
$\cot \alpha = -\cot(-\alpha)$	$\cot \alpha = \cot(180^\circ + \alpha)$	$\cot \alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$

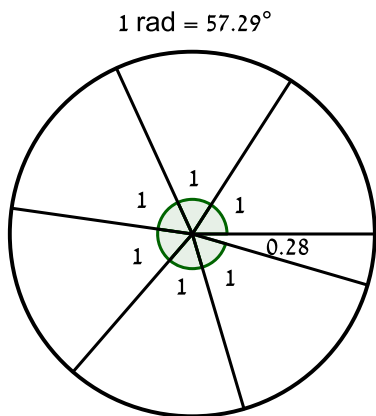
עבור זווית הגדול מסיבוב שלם מתקיים: $\sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha$ כאשר k טבעי.

באותו אופן גם: $\cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha$ כאשר k טבעי.

הרדיאן:

הגדרה:

זווית מרכזית במעגל עברה אורך הקשת שווה לרדיוס המעגל.



היקף מעגל הוא $P = 2\pi R$.

לכן לפי ההגדרה ישנם 2π רדיאנים במעגל.

באיור הסמוך ניתן לראות כי חלוקת היקף מעגל לגזרות שבהן אורך הקשת שווה לרדיוס המעגל מניב 2π חלקים כאלו (6.28) ולכן ישנם 2π רדיאנים במעגל שלם (360°).

נוסחאות מעבר:

מעבר ממעלות לרדיאנים: $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$

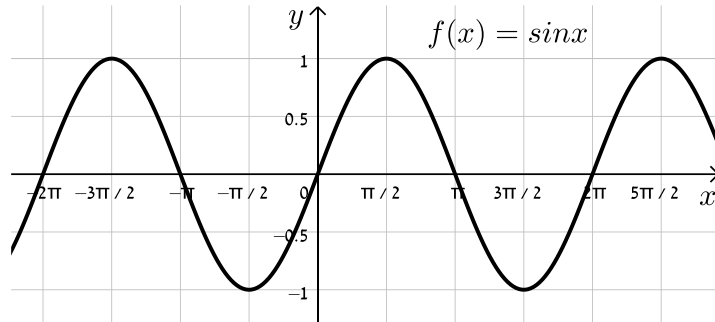
מעבר מרדיאנים למעלות: $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$

מעברים נפוצים:

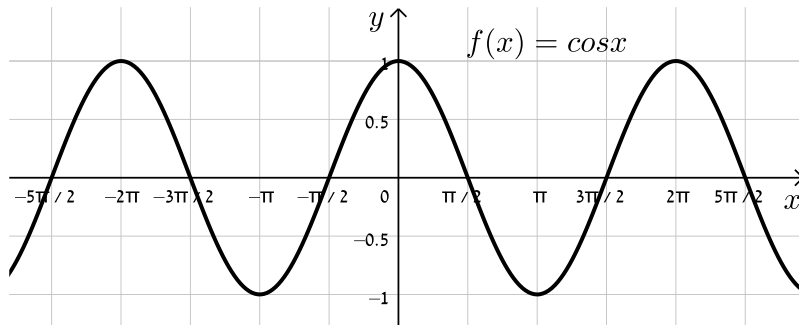
זווית במעלות	זווית ברדיאנים
360°	2π
180°	π
90°	$\frac{\pi}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
30°	$\frac{\pi}{6}$

תיאור גרפי של פונקציות טריגונומטריות:

תיאור גרפי של פונקציה הסינוס:



תיאור גרפי של פונקציה הקוסינוס:



הכפלה בקבוע, הוספת קבוע והזזת פאזה:

עבור הפונקציה: $f(t) = C + A \sin(\omega t)$

1. זמן המחזור שלה הוא $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

2. המשערת (האמפליטודה) שלה היא A .

3. הטווח של הפונקציה הוא: $[C - A : C + A]$.

עבור הפונקציה: $f(t) = \sin(t + \varphi)$

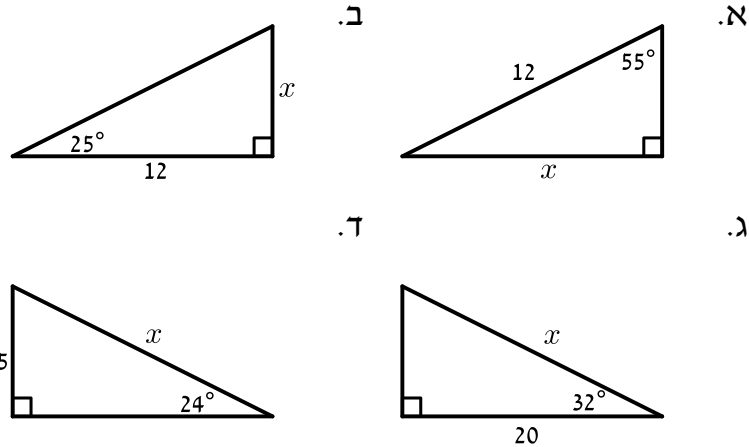
1. הפונקציה חותכת את ציר y בנקודה $(0, \sin \varphi)$.

2. אם $\varphi > 0$ נאמר כי הפונקציה מקדימה את הפונקציה עם $\varphi = 0$.

3. אם $\varphi < 0$ נאמר כי הפונקציה מאחרת ביחס לפונקציה עם $\varphi = 0$.

שאלות:

- (1) בשאלה זו נחזור על ההגדרות הטריגונומטריות במשולש ישר זווית. מצא את ערכי הנעלמים בכל אחד מהאיורים הבאים. היעזר בהגדרות של ארבעת הפונקציות הטריגונומטריות.



- (2) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = 6 \sin(2x)$, $g(x) = 2 \sin(6x)$.

- א. מה המחזור של כל פונקציה?
ב. מה היא המשרעת של כל פונקציה?

- (3) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = 3 + \sin(x)$, $g(x) = -4 + 4 \sin(3x)$.

- א. מה הוא המחזור של כל פונקציה?
ב. כתוב את הטווח של כל הפונקציה.

- (4) נתונה הפונקציה: $f(t) = C + \sin(2\pi t)$, פרמטר C .

- א. מהו זמן המחזור של הפונקציה? (ציר הזמן נמדד בשניות).
ב. מה צריך להיות ערכו של C עבורו הפונקציה תגיע לערך מירבי של 5?

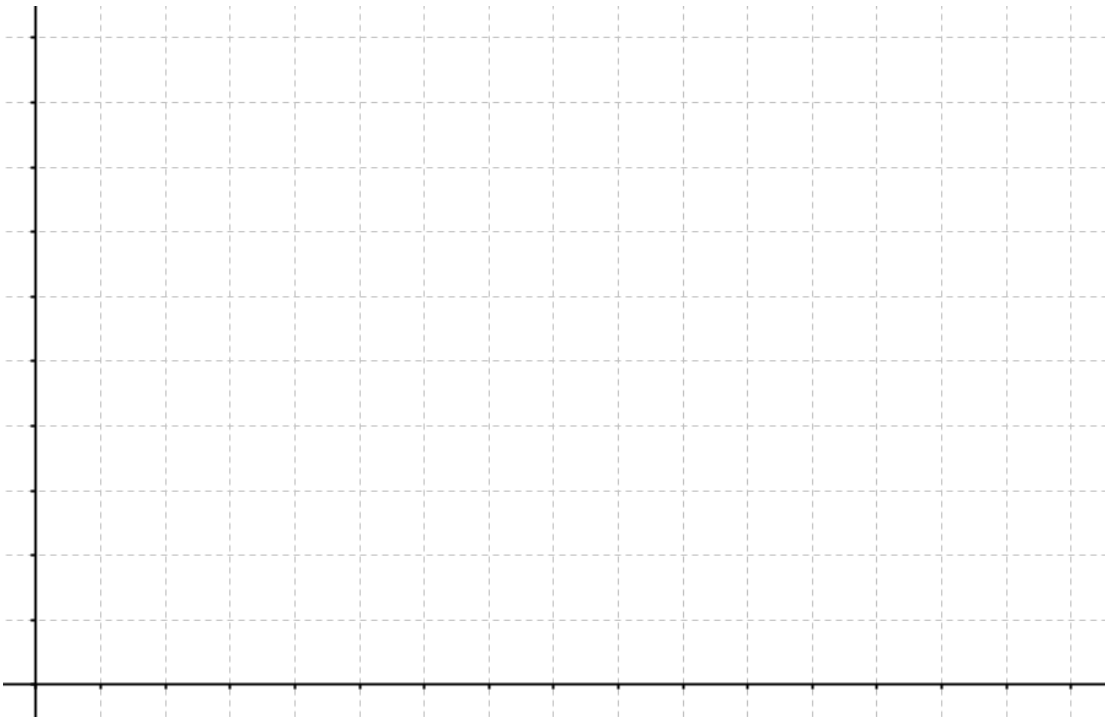
- (5) נתונה הפונקציה: $f(t) = C + A \sin(b\pi t)$, פרמטרים b , A , C .

ידוע כי זמן המחזור של הפונקציה הוא 4 שניות (כאשר ציר הזמן נמדד בשניות) והטווח של הפונקציה הוא $[2:8]$. מצא את ערכי הפרמטרים.

(6) נתונה הפונקציה: $f(t) = 3 \sin(10\pi t + \varphi)$, פרמטר φ .
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה: $(0, 1.5)$.
 מצא את ערך הפרמטר φ וקבע האם $f(t)$ מקדימה או מאחרת את
 הפונקציה: $g(t) = 3 \sin(10\pi t)$.

(7) נתונות שתי הפונקציות הבאות:
 $f(t) = 3.3 + 0.6 \cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, $g(t) = 1.8 + 0.4 \cos\left(50\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$
 ענה על הסעיפים הבאים:

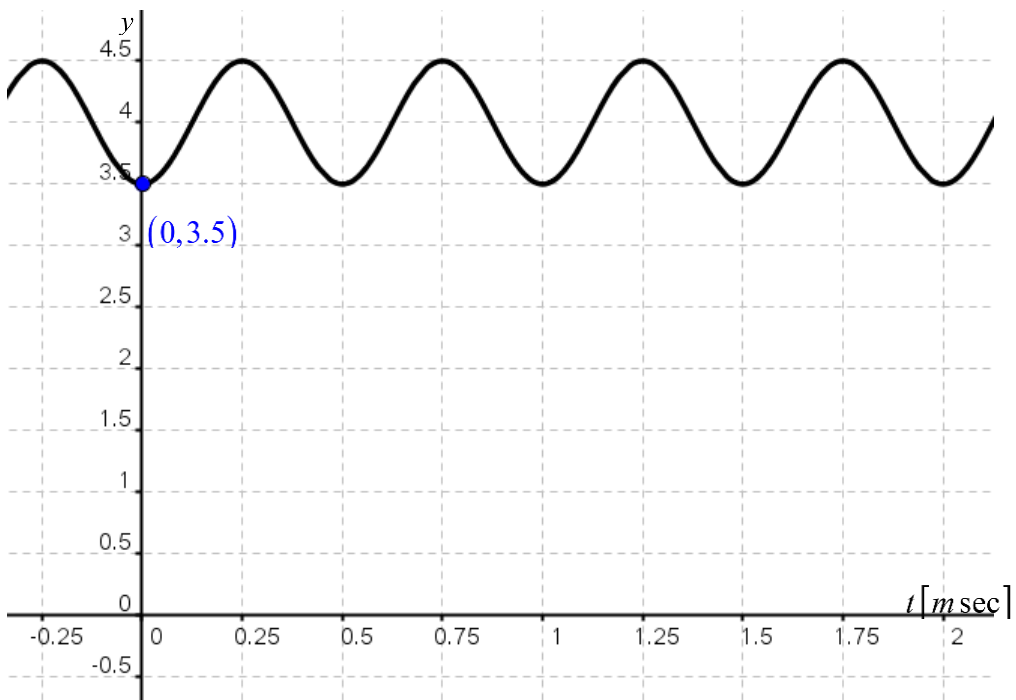
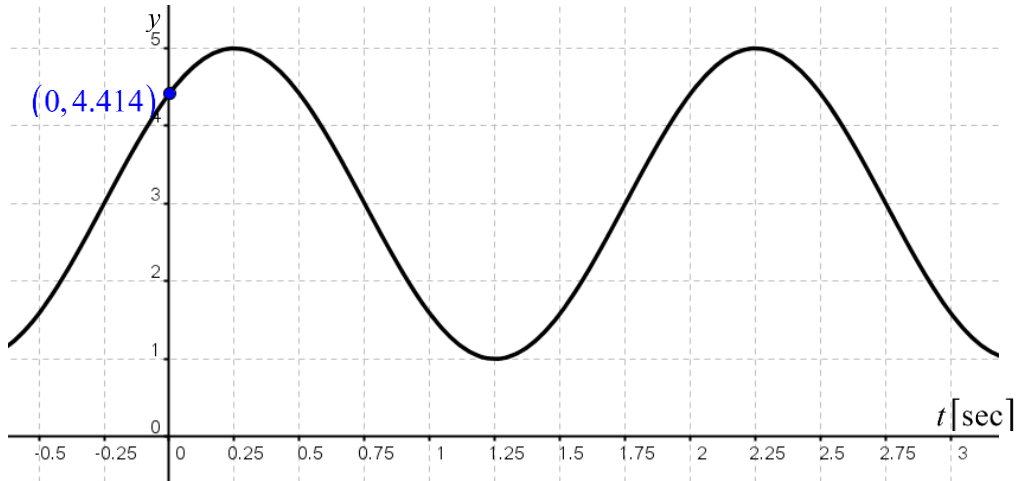
- א. מהו זמן המחזור של כל פונקציה? (הנח ציר הזמן נמדד בשניות).
- ב. כתוב את הטווח של כל פונקציה.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- y .
- ד. קבע איזו פונקציה מקדימה ואיזו מאחרת.
- ה. היעזר במערכת הצירים שלפניך וסרטט מחזור אחד של שתי הפונקציות
 תוך התייחסות לממציאך בסעיפים הקודמים.



8) לפניך שתי סקיצות של פונקציות מהצורה: $f(t) = C + A \sin(\omega t + \varphi)$.

א. מצא את זמן המחזור של כל פונקציה ואת ערכי כל הפרמטרים עבור כל אחת מהסקיצות.

ב. אלו פרמטרים ישתנו וכיצד אם התבנית היא: $f(t) = C + A \cos(\omega t + \varphi)$?
נמק והראה חישוב מתאים.



תשובות סופיות:

(1) א. 9.829 ב. 5.596 ג. 23.58 ד. 86.05

(2) א. $T_f = \pi, T_g = \frac{\pi}{3}$ ב. $A_f = 6, A_g = 2$

(3) א. $T_f = 2\pi, T_g = \frac{2\pi}{3}$ ב. $f: [2:4], g: [-8:0]$

(4) א. שנייה אחת. ב. 4

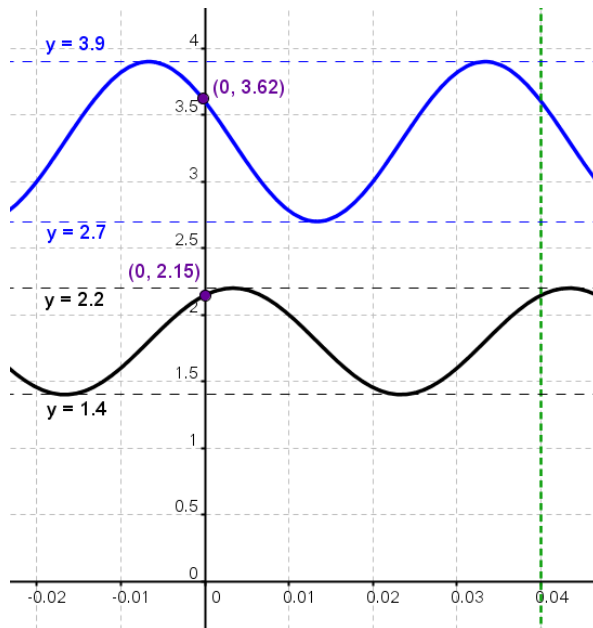
(5) $C = 5, A = 3, b = \frac{1}{2}$

(6) $\varphi = \frac{\pi}{6}$, היא תקדים.

(7) א. $T_f = T_g = 40 \text{ msec}$ ב. $f: [2.7:3.9], g: [1.4:2.2]$

ג. $f: (0, 3.6), g: (0, 2.146)$ ד. f מקדימה ו- g מאחרת.

ה. להלן סקיצה של הגרפים של הפונקציות:



(8) סקיצה ראשונה:

א. $T = 2 \text{ sec}, \varphi = \frac{\pi}{4}, \omega = \pi \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, A = 2, C = 3$ ב. רק: $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

סקיצה שנייה:

א. $T = 0.5 \text{ msec}, \varphi = -\frac{\pi}{2}, \omega = 4000\pi \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, A = \frac{1}{2}, C = 4$ ב. רק: $\varphi = -\pi$

אותות במעגל החשמלי:

הגדרות:

אות:

גודל פיזיקאלי המשתנה בזמן. אות יכול להיות מתח, זרם או הספק המשתנים בזמן.

ערכים ממוצעים:

חישוב הערך הממוצע של אות $y(t)$ בזמן התצפית בו מ- $t = a$ עד ל- $t = b$

$$. Y_{avg} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y(t) dt$$

חישוב ערך RMS (Root Mean Square), הערך האפקטיבי של אות $y(t)$ (או הערך היעיל)

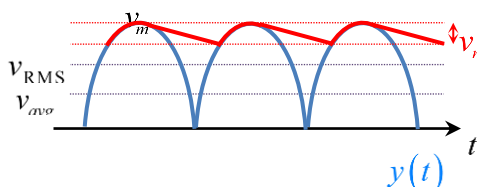
$$. Y_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b |y(t)|^2 dt}$$

יחסים בין ערכים ממוצעים:

$$. FF = \frac{Y_{RMS}}{Y} \quad \text{ערך ה-Form Factor}$$

$$. PF = \frac{Y_m}{Y_{avg}} \quad \text{ערך ה-Peak Factor}$$

$$. RF = \sqrt{FF^2 - 1} \quad \text{הערך ה-Ripple Factor}$$



אותות מחזוריים:

אות מחזורי:

אות שערכיו חוזרים על עצמם מדי פרק זמן קבוע במהלך התצפית בו.

מחזור של אות:

פרק הזמן הקצר ביותר שלאחריו ערכי האות חוזרים על עצמם. המחזור של אות יסומן ב- T .

תדר של אות:

מספר המחזורים שאות מבצע במשך שנייה אחת מוגדר בתור התדירות של האות.

נסמן את התדירות ב- f מלשון frequency והיא מקיימת: $f = \frac{1}{T}$.

יחידות התדירות הן sec^{-1} או Hz (הרץ).

התדירות הזוויתית של אות:

התדירות הזוויתית מוגדרת בתור מכפלת התדר ב- 2π רדיאנים

באופן הבא: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

יחידות התדירות הזוויתית הן $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

טור פורייה לאותות מחזוריים כלליים:

לכל אות מחזורי, בעל מחזור T , קיים אוסף של פונקציות טריגונומטריות שיוצרות אותו, הנקרא טור פורייה של האות.

את האות המחזורי $y(t)$ בעל מחזור של T ותדירות זוויתית $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$,

בתחום $[t = a : t = b]$ ניתן להציג ע"י הטור הבא:

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))$$

חישוב ערכים ממוצעים לאותות מחזוריים:

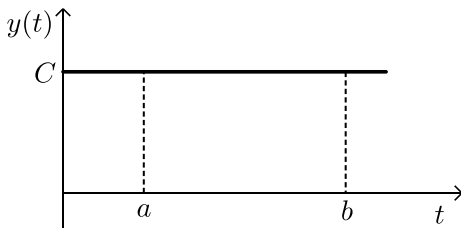
כדי לחשב ערכים ממוצעים של אותות מחזוריים מספיק להסתכל על מחזור אחד.

הערך הממוצע של אות מחזורי בעל מחזור T יחושב לפי: $Y_{avg} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$

הערך האפקטיבי של אות מחזורי בעל מחזור T יחושב לפי: $Y_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |y(t)|^2 dt}$

נוסחאות עבור אותות מרכזיים:

אות זרם ישר:

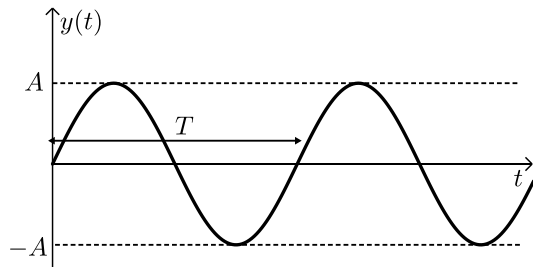


הערך הממוצע של האות: $Y_{avg} = C$

הערך האפקטיבי של האות: $Y_{RMS} = C$

אות סינוסי:

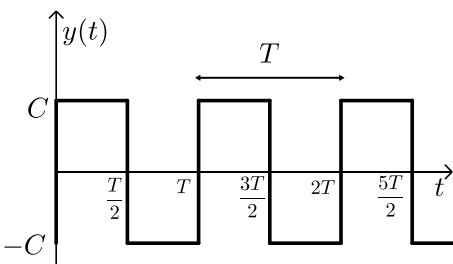
התבנית המתמטית של אות סינוסי היא: $y(t) = A \sin(\omega t)$



הערך הממוצע של האות הוא אפס: $Y_{avg} = 0$

הערך האפקטיבי של האות: $Y_{RMS} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

אות ריבועי:

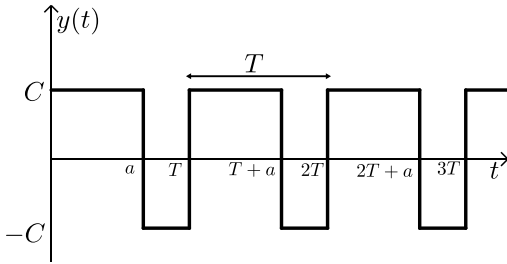


$$y(t) = \begin{cases} C & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -C & \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \text{ : התבנית המתמטית}$$

הערך הממוצע הוא אפס: $Y_{avg} = 0$

הערך האפקטיבי של האות הוא: $Y_{RMS} = C$

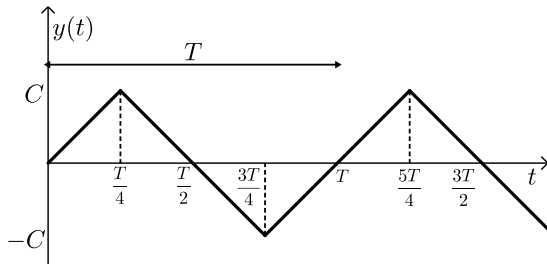
תבנית אות הריבועי כללי: $y(t) = \begin{cases} C & 0 < t < a \\ -C & a < t < T \end{cases}$, כאשר: $0 \leq a \leq T$.



הערך הממוצע של האות הוא: $Y_{avg} = \frac{2a-T}{T} C$.

הערך האפקטיבי של האות הוא: $Y_{RMS} = C$.

אות משולש:

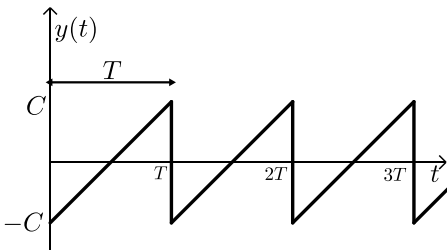


הערך הממוצע של האות: $Y_{avg} = 0$.

הערך האפקטיבי של האות: $Y_{RMS} = \frac{C}{\sqrt{3}}$.

נוסחה זו נשמרת לכל אות משולש שמקבל ערכי שיא השווים בערכם המוחלט (אות סימטרי).

אות שן מסור:



הערך הממוצע של האות: $Y_{avg} = 0$.

הערך האפקטיבי של האות: $Y_{RMS} = \frac{C}{\sqrt{3}}$.

חיבור של אותות מחזוריים:

עבור אות מחזורי $y(t)$ המורכב מהאותות המחזוריים הבאים: $y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)$
 כלומר: $y(t) = y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)$, נוכל לחשב את הערכים הממוצעים באופן הבא:

הערך הממוצע של האות יחושב ע"י חיבור הערכים הממוצעים של כל האותות:

$$Y_{avg} = Y_{1avg} + Y_{2avg} + Y_{3avg} + \dots + Y_{Navg}$$

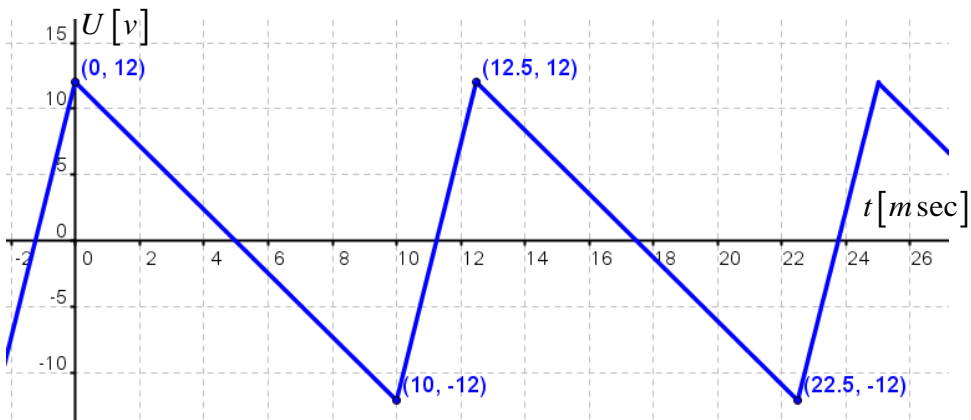
הערך האפקטיבי של האות יחושב ע"י השורש של סכום הריבועים של הערכים

האפקטיביים של כל האותות: $Y_{RMS} = \sqrt{Y_{1RMS}^2 + Y_{2RMS}^2 + Y_{3RMS}^2 + \dots + Y_{NRMS}^2}$.

שאלות:

- 1) גל שן מסור סימטרי המייצג זרם במעגל, הינו בעל מחזור של 4 msec . ידוע כי ערך השיא שלו הוא 6 mA וכי הוא זורם דרך נגד של $14 \text{ k}\Omega$.
- חשב את הזרם האפקטיבי שמרגיש הנגד.
 - מהי תדירות הזרם האפקטיבי?
 - מהו ההספק המתפתח על הנגד?

- 2) באיור שלפניך נתון גרף של אות מתח שנצפה ונמדד בין שני ההדקים של נגד עומס שהתנגדותו 75Ω .



- מהו תדר האות?
- מהו הערך המירבי של הזרם הזורם בנגד העומס?
- מהו ממוצע ההספק בנגד?
- מהו מכשיר המדידה שבאמצעותו נצפה האות המתואר באיור?

(3) השלם את הטבלה הבאה :

(ציר הזמן של כל הביטויים הוא בשניות - sec).

מקרה	האות	משרעת	תדירות זוויתית	תדר	זווית מופע	ערך אפקטיבי	ערך רגעי $t = 1 \text{ m sec}$ ב-
1	$20 \sin(100\pi t + 30^\circ)$						
2	$10 \sin(50\pi t + 45^\circ)$						
3	$2 \sin\left(314t + \frac{\pi}{3}\right)$						
4	$110\sqrt{2} \sin\left(157.08\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$						
5	$54 \cos(2300t - 15^\circ)$						
6	$27 \cos\left(2500t - \frac{\pi}{6}\right)$						

(4) מחברים בטור למקור המתח : $U_1(t) = 22 \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$, מקור מתח קבוע.

ערך מקור המתח הקבוע אינו ידוע ויסומן ב- U_0 .

ידוע כי המתח המירבי שמרגיש נגד עומס של $4.7 \text{ k}\Omega$ הוא 30 V .

א. מצא את U_0 .

ב. כתוב את משוואת המתח הרגעית שמרגיש נגד העומס.

ג. מצא את המתח האפקטיבי והמתח הממוצע שמרגיש נגד העומס.

ד. חשב את ההספק הממוצע המתפזר על נגד העומס.

(5) שלושה מקורות מתח מחוברים בטור זה לזה :

$$U_1(t) = 8 \sin(1000t + 60^\circ) [\text{V}], U_2 = 5 [\text{V}], U_3(t) = 10 \sin(3000t + 45^\circ) [\text{V}]$$

מחברים את שלושת המקורות לנגד עומס של 40Ω .

א. חשב את המתח הממוצע על הנגד העומס.

ב. חשב את המתח האפקטיבי של נגד העומס.

ג. חשב את ההספק המתפזר על נגד העומס.

ד. רשום את משוואת הזרם הרגעית על נגד העומס.

תשובות סופיות:

- (1) א. 3.464 mA ב. 250Hz ג. 0.167W
 (2) א. 80Hz ב. 160mA ג. 0.64W ד. משקף תנודות (אוסילוסקופ).
 (3) להלן הטבלה עם הפתרונות:

האות	משרעת	תדירות זוויתית	תדר	זווית מופע	ערך אפקטיבי	ערך רגעי $t = 1msec$
1	20	100π	50	30°	14.14	14.862
2	10	50π	25	45°	7.07	8.09
3	2	314	50	60°	1.41	1.956
4	$110\sqrt{2}$	157.08π	78.5	-45°	110	-44.67
5	54	2300	366	-15°	38.18	-24.33
6	27	2500	397	-30°	19.1	-10.652

$$(4) \quad \text{א. } 8V \quad \text{ב. } U_R(t) = 8 + 22 \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{ג. } U_{avg} = 8V, U_{RMS} = 3\sqrt{34}V \approx 17.49V \quad \text{ד. } P = 65.1mW$$

$$(5) \quad \text{א. } 5V \quad \text{ב. } U_{RMS} = \sqrt{107}V \approx 10.34V \quad \text{ג. } P = 2.675W$$

$$\text{ד. } I(t) = 0.125 + 0.2 \sin(1000t + 60^\circ) + 0.25 \sin(3000t + 45^\circ)$$